Μάθημα	:	**Θεμελιώδεις Έννοιες των Μαθηματικών** (Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων)
Ακαδημαϊκό Έτος	:	**2017 - 2018**
Περιεχόμενο	:	**Δεύτερο Φυλλάδιο Ασκήσεων του καθ. Ανδρέα Τόλια**
Ημερομηνία Στοιχειοθεσίας	:	2019/08/30 (ώρα 13:37:31)
Δημιουργήθηκε από	:	Κυριάκος Γ. Μαυρίδης
Ηλεκτρονικό Ταχυδρομείο	:	• kyriakos.g.mavridis@gmail.com • kmavridi@uoi.gr
Ιστοσελίδα	:	http://users.uoi.gr/kmavridi/
Άδεια Χρήσης	:	*“Creative Commons Αναφορά Δημιουργού 4.0 Διεθνές”* (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

1. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C, D ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$

Λύση.
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \backslash B) \cup (A \cap B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (A \backslash B) \vee x \in (A \cap B) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in B) \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in A] \wedge [(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B] \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in A \vee x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \in A)] \wedge [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B)] \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A) \wedge (x \notin B \vee x \in A)] \wedge [(x \in A \vee x \in B) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A) \wedge [x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin B)] \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A) \wedge (x \in A) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A)
\end{aligned}
$$

(ii) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Λύση.
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cup B) \backslash (A \cap B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \vee x \in B) \wedge [(\sim x \in A) \vee (\sim x \in B)] \\
\Leftrightarrow\ & [(x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim x \in A)] \vee [(x \in A \vee x \in B) \wedge (\sim x \in B)] \\
\Leftrightarrow\ & [x \in A \wedge (\sim x \in A)] \vee [x \in B \wedge (\sim x \in A)] \vee [x \in A \wedge (\sim x \in B)] \vee [x \in B \wedge (\sim x \in B)]
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι η παρένθεση $[x \in A \wedge (\sim x \in A)]$ και η παρένθεση $[x \in B \wedge (\sim x \in B)]$ είναι πάντοτε ψευδείς οπότε, επειδή ανάμεσα στις μεγάλες παρενθέσεις υπάρχει το “ή” αυτές τις δύο παρενθέσεις τις αγνωούμε.

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & [x \in B \wedge (\sim x \in A)] \vee [x \in A \wedge (\sim x \in B)] \\
\Leftrightarrow\ & x \in (B \backslash A) \vee x \in (A \backslash B) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (B \backslash A) \cup (A \backslash B)
\end{aligned}
$$

(iii) $(A \cap B) \backslash (A \cap C) = A \cap (B \backslash C)$

Λύση.
Έχουμε

$$
\begin{aligned}
& x \in (A \cap B) \backslash (A \cap C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in (A \cap B) \wedge x \notin (A \cap C) \\
\Leftrightarrow\ & (x \in A \wedge x \in B) \wedge [(\sim x \in A) \vee (\sim x \in C)] \\
\Leftrightarrow\ & [x \in A \wedge x \in B \wedge (\sim x \in A)] \vee [x \in A \wedge x \in B \wedge (\sim x \in C)]
\end{aligned}
$$

Όμως η πρώτη παρένθεση είναι αδύνατο να ισχύει, άρα είναι ψευδής.
Επειδή ανάμεσα στις παρενθέσεις υπάρχει το “ή”, μένει μόνον η δεύτερη.

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in B \wedge (\sim x \in C) \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in B \backslash C \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cap (B \backslash C)
\end{aligned}
$$

(iv) $(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap C)\backslash(B\cup D)$
Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned}
&x\in(A\backslash B)\cap(C\backslash D)\\
\Leftrightarrow\ &x\in(A\backslash B)\wedge x\in(C\backslash D)\\
\Leftrightarrow\ &(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in C\wedge x\notin D)\\
\Leftrightarrow\ &x\in A\wedge x\notin B\wedge x\in C\wedge x\notin D\\
\Leftrightarrow\ &(x\in A\cap C)\wedge[\sim x\in(B\cup D)]\\
\Leftrightarrow\ &x\in(A\cap C)\backslash(B\cup D)
\end{aligned}$$

2. Αν K, L είναι δυο σύνολα, να δείξετε την ισοδυναμία

$$K\subseteq L\Leftrightarrow K\backslash L\subseteq L\backslash K\ .$$

Λύση.
Έστω ότι $K\subseteq L$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&x\in K\backslash L\\
\Rightarrow\ &x\in K\wedge x\notin L\\
&\text{Από την υπόθεση έχουμε ότι } K\subseteq L\\
\Rightarrow\ &x\in L\wedge x\notin L
\end{aligned}$$

Τέτοιο x δεν μπορεί να υπάρχει, άρα $K\backslash L=\emptyset$, και προφανώς $\emptyset\subseteq L\backslash K$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $K\backslash L\subseteq L\backslash K$ και θεωρούμε $x\in K$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&x\in K\\
\Rightarrow\ &x\in(K\backslash L)\vee x\in(K\cap L)\\
&\text{Από την υπόθεση έχουμε ότι } K\backslash L\subseteq L\backslash K\\
\Rightarrow\ &x\in(L\backslash K)\vee x\in(K\cap L)\\
\Rightarrow\ &x\in(L\backslash K)\vee x\in(L\cap K)\\
\Rightarrow\ &x\in L
\end{aligned}$$

Άρα $K\subseteq L$.

3. Για οποιαδήποτε σύνολα A, B, να δείξετε τα εξής

(i) $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$
Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned}
X\in\mathcal{P}(A\cap B)&\Leftrightarrow X\subseteq A\cap B\\
&\Leftrightarrow(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq B)\\
&\Leftrightarrow[X\in\mathcal{P}(A)]\wedge[X\in\mathcal{P}(B)]\\
&\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)]
\end{aligned}$$

(ii) $A\cap B=\emptyset\Leftrightarrow\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\{\emptyset\}$
Λύση.
Έστω ότι $A\cap B=\emptyset$. Τότε

$$\begin{aligned}
X\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)&\Leftrightarrow X\in\mathcal{P}(A)\wedge X\in\mathcal{P}(B)\\
&\Leftrightarrow(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq B)\\
&\quad\text{Το } X \text{ δεν μπορεί να περιέχει στοιχεία, γιατί αν περιείχε για}\\
&\quad\text{παράδειγμα το στοιχείο } x,\ \text{τότε το } x \text{ θα έπρεπε να ανήκει}\\
&\quad\text{ταυτόχρονα και στο } A \text{ και στο } B \text{ το οποίο είναι άτοπο,}\\
&\quad\text{αφού από την υπόθεση έχουμε ότι } A\cap B=\emptyset.\\
&\Leftrightarrow X=\emptyset
\end{aligned}$$

Άρα $\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)=\{\emptyset\}$.

Για το αντίστροφο, έστω ότι $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$ και θεωρούμε $x \in A \cap B$. Έχουμε

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \wedge \{x\} \in \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \\ &\Leftrightarrow \{x\} \in \{\emptyset\} \\ &\Leftrightarrow \{x\} = \emptyset \end{aligned}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το $\{x\}$ περιέχει ένα στοιχείο ενώ το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία. Άρα δεν υπάρχει $x \in A \cap B$, συνεπώς το $A \cap B$ είναι το κενό σύνολο.

4. Δίνεται η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $A_1 = \emptyset$ και $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$. Να βρεθούν τα σύνολα A_2, A_3, A_4 και το $\mathcal{P}(A_3)$.
Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \cup \{A_1\} \\ &= \emptyset \cup \{\emptyset\} \\ &= \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= A_2 \cup \{A_2\} \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= A_3 \cup \{A_3\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_3) &= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

5. Δίνεται η ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $A_1 = \emptyset$ και $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n) \backslash A_n$. Να βρεθούν τα σύνολα A_2, A_3, A_4 και A_5.
Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned} A_2 &= \mathcal{P}(A_1) \backslash A_1 \\ &= \{\emptyset\} \backslash \emptyset \\ &= \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \mathcal{P}(A_2) \backslash A_2 \\ &= \mathcal{P}(\{\emptyset\}) \backslash \{\emptyset\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \backslash \{\emptyset\} \\ &= \{\{\emptyset\}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \mathcal{P}(A_3) \backslash A_3 \\ &= \mathcal{P}(\{\{\emptyset\}\}) \backslash \{\{\emptyset\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \backslash \{\{\emptyset\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 &= \mathcal{P}(A_4) \backslash A_4 \\ &= \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}) \backslash \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \\ &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\} \backslash \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\} \\ &= \{\{\emptyset\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}\}. \end{aligned}$$

6. Αν X, Y, Z, W είναι τυχόντα σύνολα, να αποδειχθούν τα εξής

(i) $(x,y) \notin X \times Y \Leftrightarrow x \notin X \vee y \notin Y$.
Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned}(x,y) \notin X \times Y &\Leftrightarrow\ \sim [(x,y) \in X \times Y] \\ &\Leftrightarrow\ \sim (x \in X \wedge y \in Y) \\ &\Leftrightarrow (\sim (x \in X)) \vee (\sim (y \in Y)) \\ &\Leftrightarrow x \notin X \vee y \notin Y\ .\end{aligned}$$

(ii) $(X \times Y) \backslash (Z \times W) = [X \times (Y \backslash W)] \cup [(X \backslash Z) \times Y]$.
Λύση.
Έχουμε

$$\begin{aligned}(x,y) \in (X \times Y) \backslash (Z \times W) &\Leftrightarrow (x,y) \in (X \times Y) \wedge (x,y) \notin (Z \times W) \\ &\Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y) \wedge (x \notin Z \wedge y \notin W) \\ &\Leftrightarrow (x \in X \wedge y \in Y \wedge x \notin Z) \vee (x \in X \wedge y \in Y \wedge y \notin W) \\ &\Leftrightarrow [(x \in X \wedge x \notin Z) \wedge y \in Y) \vee [x \in X \wedge (y \in Y \wedge y \notin W)] \\ &\Leftrightarrow (x \in X \backslash Z \wedge y \in Y) \vee (x \in X \wedge y \in Y \backslash W) \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in [(X \backslash Z) \times Y] \vee (x,y) \in [X \times (Y \backslash W)] \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in [X \times (Y \backslash W)] \cup [(X \backslash Z) \times Y].\end{aligned}$$

7. Ας είναι A, B δύο σύνολα.

(i) Αν τα A, B είναι μη κενά και ισχύει ότι $A \times B \subseteq B \times A$, να δειχθεί ότι $A = B$.
Λύση.
Αφού $B \neq \emptyset$, θεωρούμε τυχαίο $y \in B$, και έχουμε

$$\begin{aligned}x \in A &\Rightarrow (x,y) \in A \times B \\ &\quad\ \text{Όμως } A \times B \subseteq B \times A. \\ &\Rightarrow (x,y) \in B \times A \\ &\Rightarrow x \in B.\end{aligned}$$

Άρα $A \subseteq B$.
Επίσης, αφού $A \neq \emptyset$, θεωρούμε τυχαίο $u \in A$, και έχουμε

$$\begin{aligned}v \in B &\Rightarrow (u,v) \in A \times B \\ &\quad\ \text{Όμως } A \times B \subseteq B \times A. \\ &\Rightarrow (u,v) \in B \times A \\ &\Rightarrow v \in A.\end{aligned}$$

Άρα $B \subseteq A$. Τελικά λοιπόν έχουμε ότι $A = B$.

(ii) Δείξε, χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα ότι η υπόθεση πως τα σύνολα A, B είναι μη κενά δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.
Λύση.
Θεωρούμε τα σύνολα $A = \{a\}$ και $B = \emptyset$ και έχουμε $A \times B = B \times A = \emptyset$, ενώ προφανώς $A \neq B$.

8. Θεωρούμε τα σύνολα A, X, Y.

(i) Αν τα X, Y είναι μη κενά και ισχύει $(X \times Y) \cup (Y \times X) \subseteq A \times A$, να δείξετε ότι $X \cup Y \subseteq A$.
Λύση.
Θεωρούμε $z \in X \cup Y$. Τότε $z \in X$ ή $z \in Y$. Θα μελετήσουμε την περίπτωση $z \in X$ και η περίπτωση $z \in Y$ μελετάται ανάλογα.
Αφού το Y είναι μη κενό, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα στοιχείο $y \in Y$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}(z \in X) \wedge (y \in Y) &\Rightarrow (z,y) \in X \times Y \\ &\Rightarrow (z,y) \in (X \times Y) \cup (Y \times X) \\ &\Rightarrow (z,y) \in A \times A \\ &\Rightarrow z \in A\end{aligned}$$

Συνεπώς $X \cup Y \subseteq A$.

(ii) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι η υπόθεση πως τα σύνολα X, Y είναι μη κενά δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.
Λύση.
Θεωρούμε τα σύνολα $X = \emptyset$, $Y = \{1\}$ και $A = \{2\}$. Τότε έχουμε

$$\emptyset = (X \times Y) \cup (Y \times X) \subseteq A \times A = \{(2,2)\}$$

ενώ

$$\{1\} = X \cup Y \not\subseteq A = \{2\}.$$

(iii) Αν $A \times A \subseteq (X \times Y) \cup (Y \times X)$, να δείξετε ότι $A \subseteq X \cap Y$.
Λύση.
Θεωρούμε $a \in A$. Τότε $(a,a) \in A \times A$, οπότε $(a,a) \in (X \times Y) \cup (Y \times X)$. Συνεπώς $(a,a) \in (X \times Y)$ ή $(a,a) \in (Y \times X)$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $a \in X$ και $a \in Y$, οπότε $a \in X \cap Y$. Άρα $A \subseteq X \cap Y$.